

Meike Grüßing / Andrea Peter-Koop (Hrsg.)

Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren



Einbandgestaltung

Das Foto auf dem Einband zeigt eine Studentin der Universität Oldenburg bei der Durchführung eines diagnostischen Interviews mit einem Kindergartenkind.

Es ist im Rahmen des von Meike Grüßing beschriebenen Projekts zur mathematischen Frühförderung entstanden.

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

© 2006 Mildenberger Verlag GmbH, 77652 Offenburg
Druck und Bindung: Appel & Klinger, 96317 Kronach
Bestell-Nr. 140-83 – ISBN 3-619-01483-3
ISBN 978-3-619-01483-5 (ab 01.01.2007)
Auflage 1 Jahr 2006

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen!

Einleitung

Die Entwicklung mathematischen Denkens: Beobachten – Fördern – Dokumentieren

Meike Grüßing (Oldenburg) 5–9

Teil 1: Grundlagen der Förderdiagnostik

Förderdiagnostik: Entstehung – Ziele – Leitlinien – Beispiele

Elisabeth Moser-Opitz (Bern/Fribourg) 10–28

„Pädagnostik“ – Optimierung pädagogischer Angebote durch differenzierte Lernstandsdiagnosen, unter besonderer Berücksichtigung mathematischer Kompetenzen

Rudolf Kretschmann (Bremen) 29–54

Förderdiagnostische Aufgaben für Kindergarten und Anfangsunterricht

Jens Holger Lorenz (Heidelberg) 55–66

Teil 2: Frühkindliche mathematische Bildung: Spielen, Fördern, Lernen

Mathematische Einsichten von Kindern im Vorschulalter

Klaus Hasemann (Hannover) 67–79

Kindermuster und Pläne dazu –

Lernumgebungen zur frühen geometrischen Förderung

Bernd Wollring (Kassel) 80–102

Mit Fantasie zur Mathematik –

Freie Eigenproduktionen mit gleichem Material in großer Menge

Kerensa Hülswitt (Bremen) 103–121

Teil 3: Übergänge gestalten**Handlungsleitende Diagnostik und mathematische Frühförderung
im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule**

Meike Grüßing (Oldenburg) 122–132

Anfangsunterricht Mathematik in jahrgangsgemischten Lerngruppen

Marcus Nührenbörger (Essen) 133–149

Mathematische Bilderbücher:**Kooperation von Elternhaus, Kindergarten und Grundschule**

Andrea Peter-Koop & Meike Grüßing (Oldenburg) 150–169

Teil 4: Umgang mit „auffälligen“ Mathematikleistungen**Früherkennung von Rechenstörungen und entsprechende
Fördermaßnahmen**

Sabine Kaufmann (Heidelberg) 160–168

**Förderung und Mathematikunterricht im Schnittfeld unterschiedlicher
Begabungen von Grundschulkindern**

Michaela Hegemann & Siegbert Schmidt (Köln) 169–185

Fallbeispiele zur frühkindlichen Entwicklung kleiner Matheasse

Friedhelm Käpnick & Mandy Fuchs (Münster) 186–199

Blick über den Tellerrand**Persönlichkeitsentwicklung und mathematische Aktivität:
Förderung mathematischer Kompetenzen beim Übergang
vom Kindergarten zur Grundschule in den Niederlanden**

Joost Klep (Enschede) 200–216

Autorinnen und Autoren 217

Fallbeispiele zur frühkindlichen Entwicklung kleiner Matheasse

Friedhelm Käpnick & Mandy Fuchs

Viele empirische Untersuchungen der letzten Jahre belegen eindrucksvoll, dass Vorschulkinder schon über verschiedene Kompetenzen im Zählen und Rechnen sowie im Umgang mit geometrischen Formen verfügen (vgl. z. B. Caluori 2003, Hasemann 2004, Grassmann 1995). Zugleich wird deutlich, dass es bereits in dieser Entwicklungsphase große Leistungsunterschiede zwischen Gleichaltrigen gibt, dass Kinder verschiedene individuelle Zugänge zu Zahlen haben oder unterschiedliche Rechenstrategien entwickeln. Ob in dieser frühkindlichen Entwicklungsphase aber schon eine besondere mathematische Begabung erkannt werden kann, ist weitestgehend ungeklärt. Das nebenstehende Beispiel eines Vorschulkindes ist zweifellos beeindruckend, aber m. E. noch kein hinreichender Beleg für

das Vorhandensein einer besonderen mathematischen Begabung (vgl. unsere Auffassung zum Begabungsbegriff im folgenden Textfeld). Außerdem wissen wir nur wenig da-

$$\begin{array}{l}
 1200 = 1560 \\
 65 \cdot 24 = 120 + 240 \neq \\
 365 \cdot 24 = \\
 \hline
 300 \cdot 24 = \cancel{7200} \\
 1200 \\
 6000 \\
 \hline
 8760
 \end{array}$$

Abb. 1: Eigenproduktion eines sechsjährigen Vorschulkindes zur Aufgabe „Wie viele Stunden hat ein Jahr?“

Merkmalsystem zum Begriff „mathematisch begabtes Grundschulkind“ (vgl. Käpnick 1998)

Unter mathematisch begabten Grundschulkindern verstehen wir Grundschul Kinder, die ein individuell geprägtes bereichsspezifisches Potenzial für eine mit großer Wahrscheinlichkeit im Jugend- und Erwachsenenalter entfaltete weit über dem Durchschnitt liegende mathematische Leistungsfähigkeit besitzen.

Mathematikspezifische Merkmale:

- Fähigkeit zum Speichern mathematischer Sachverhalte im Kurzzeitgedächtnis unter Nutzung erkannter mathematischer Strukturen,
- mathematische Fantasie,
- Fähigkeit im Strukturieren mathematischer Sachverhalte,
- Fähigkeit im selbstständigen Transfer erkannter Strukturen,
- Fähigkeit im selbstständigen Wechseln der Repräsentationsebenen und im selbstständigen Umkehren von Gedankengängen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben,
- mathematische Sensibilität

Begabungsstützende allgem. Persönlichkeitseigenschaften:

- hohe geistige Aktivität,
- intellektuelle Neugier,
- Anstrengungsbereitschaft,
- Freude am Problemlösen,
- Konzentrationsfähigkeit,
- Beharrlichkeit,
- Selbstständigkeit,
- Kooperationsfähigkeit

rüber, wie im Vorschulalter Prozesse einer ggf. beginnenden mathematischen Begabungsentfaltung in Wechselbeziehungen zur gesamten kindlichen Reifung verlaufen.

Verschiedene Wissenschaftsdisziplinen stellen in letzter Zeit zumindest die große Bedeutung der frühkindlichen Entwicklung heraus und geben dabei Anhaltspunkte für eine mögliche mathematische Begabungsentwicklung in dieser Entwicklungsphase:

- Hirnforscher gehen davon aus, dass Persönlichkeit und Charakter des Menschen und damit die Grundstrukturen des Verhältnisses zu sich selbst und zu seiner Umwelt sehr früh festgelegt werden. Genetisch oder bereits vorgeburtlich bedingte Charakterzüge sollen demnach knapp die Hälfte unserer Persönlichkeit ausmachen. Hinzu kommen Merkmale, die durch prägungsartige Vorgänge kurz nach der Geburt bzw. in den ersten drei bis fünf Jahren bestimmt werden. Besonders wichtig scheint dabei die Interaktion mit den Bezugspersonen (Mutter, Vater) zu sein (vgl. Roth 2001, S. 452).
 - Die Bedeutung des frühen Kindesalters wird unterstrichen durch Erkenntnisse über die Entwicklungsdynamik und Plastizität des menschlichen Gehirns. In später Jugend und im Erwachsenenalter ist der Mensch demnach in seinen Persönlichkeitsmerkmalen nur noch wenig veränderbar, es sei denn, er hat starke positive oder negative emotionale Erlebnisse. Personen suchen sich eher die Umwelten, die zu ihnen passen, als dass sie sich diesen Umwelten anpassen (vgl. ebenda).
 - Die Intelligenzforschung wies vielfach nach, dass schon Schulanfänger sehr hohe allgemeine kognitive Kompetenzen besitzen können. Darüber hinaus gibt es empirische Befunde, die bereichsspezifische überdurchschnittliche mathematische Kompetenzen bei Vorschulkindern belegen (vgl. z. B. Häuser, Schaarschmidt 1991).
 - Nach neuropsychologischen Erkenntnissen besitzen Menschen einen angeborenen Zahlensinn (vgl. Dehaene 1999).
- Außerdem kann aufgrund hinlänglich bekannter Beispiele für eine vorschulische Begabung auf musisch-künstlerischem, auf sprachlichem oder sportlichem Gebiet vermutet werden, dass sich im Vorschulalter auch schon besondere mathematische Begabungen entwickeln.
- Eine verlässliche Diagnose einer besonderen mathematischen Begabung erscheint dennoch bei Fünf- bis Achtjährigen prinzipiell problematisch (vgl. Käpnick, Fuchs 2004, S. 6-7):
- Fünf- bis achtjährige Kinder denken und handeln im Allgemeinen sehr spontan. Sie sind meist schnell von einer Sache begeistert, ihr Interesse lässt aber oft ebenso schnell wieder nach. Häufig geben sich Vorschulkinder oder Kinder in den ersten beiden Schuljahren mit oberflächlich erkannten Neuem zufrieden. Sie wenden sich – offen im Denken und allgemein neugierig – sprunghaft anderen Themen zu, wollen vieles ausprobieren. Schnelle und häufige Wechsel von Interessen sind somit typisch und erlauben meist noch kein eindeutiges Erkennen einer Tätig-

keits- oder einer besonderen Begabungspräferenz.

- In dieser Entwicklungsphase unterliegt die kognitive und sprachliche Entwicklung großen Veränderungen. Tendenziell vollzieht sich zwar der Übergang zu einer eigenständigen, von einer konkret-anschaulichen Situation abgehobenen Erkenntnistätigkeit, sodass die Kinder gedankliche Operationen aufbauen können. Die Kinder bleiben dabei aber in der Regel noch längere Zeit beim empirischen Verallgemeinern und erfassen auf dieser Basis einfache Raum-, Zeit und Kausalbeziehungen. Insgesamt gesehen entwickeln sich die kognitiven Kompetenzen jedoch teils schrittweise, teils sprunghaft und individuell sehr unterschiedlich. Kindliche Fantasiewelten und animistische Vorstellungen erschweren uns zusätzlich einen Zugang und eine objektive Wertung ihrer Denkqualitäten. Hinzu kommt, dass die sprachlichen Kompetenzen der Kinder meist noch nicht so weit entwickelt sind, dass sie angemessen über ihr eigenes Tun und über ihre Gedanken verbal reflektieren können. Viele Erkenntnisprozesse laufen zudem im Unterbewusstsein ab, werden von Emotionen und Stimmungen mitbestimmt und entziehen sich somit sogar einer bewussten Reflexion durch die Kinder.

„Kleine Zahlen sind schwach. Sie brauchen die Hilfe von anderen Zahlen. Aber große Zahlen sind stark, die können allein stehen.“

Beispiel einer animistischen Vorstellung zu Zahlen bei der achtjährigen Julia (vgl. Käpnick 2002)

- Der Wortschatz von Fünf- bis Achtjährigen ist oft noch sehr begrenzt. Bei ihnen vermischen sich häufig Alltagsbegriffe diffus mit mathematischen Begriffen oder anderen Fachbegriffen. Dabei haben sie nicht selten ein noch verzerrtes oder teilweise falsches inhaltliches Verständnis von mathematischen Begriffen. Außerdem ist zu beachten, dass es Kindern in diesem Alter meist sehr schwer fällt, sich zusammenhängend logisch strukturiert zu einem Problem zu äußern. Mündliche Darstellungen von Lösungswegen oder schriftliche Eigenproduktionen zu mathematischen Problembearbeitungen wirken deshalb häufig chaotisch bzw. sind nicht leicht verständlich.



Abb. 2: Beispiel einer nicht leicht verständlichen Eigenproduktion eines Zweitklässlers zu einem Überfahrtsproblem

- Der Schulanfang ist ein Zeitraum mit besonders markanten Veränderungen in den Lebensbedingungen und der Lebensweise der Kinder. Hierzu gehört, dass die Dominanz der Spieltätigkeit durch die der Lern-tätigkeit ersetzt wird, dass die Kinder sich schnell in einer neuen Umgebung, ihrer Schule und ihrer Klasse, zurechtfinden

müssen, dass sie feste Normen des sozialen Verhaltens kennenlernen und einhalten sollen usw. Gerade für die oft sehr sensiblen (hoch)begabten Kinder ist eine solche Situation nicht unproblematisch. Werden sie von Anfang an im Unterricht unterfordert oder auf ein durchschnittliches Leistungsniveau „zurechtgestutzt“, machen sich bald Schulunlust oder Frust breit. Ihr besonderes Begabungspotenzial bleibt somit im „Verborgenen“. Besonders schwierig ist es, in den ersten Schulwochen das wahre Leistungspotenzial von stillen, zurückhaltenden oder schüchternen Kindern zu erkennen, da sie aufgrund ihrer sozialen Konstellation kaum fähig oder noch nicht bereit sind, ihre Leistungskompetenzen „öffentlich“ zu zeigen. In unseren Förderprojekten haben wir auch begabte Kinder kennengelernt, die sich bewusst dem mittleren Leistungsniveau einer Klasse „anpassen“, also oft im Unterricht bewusst etwas Falsches sagten, um nur nicht aufzufallen oder um nicht als Außenseiter zu gelten (vgl. auch nachfolgende Anmerkungen). Demgegenüber gibt es ebenso sehr selbstbewusste Kinder, die schon erstaunlich geschickt kommunizieren und ihr beachtliches Können demonstrieren. Jedoch sind selbstbewusstes und geschicktes Auftreten sowie die im Schulunterricht geforderten Zähl- und Rechenkompetenzen keinesfalls ein Hinweis auf eine besondere mathematische Begabung.

- Mitunter bereiten Eltern, Geschwister oder Großeltern ein Kind durch intensives Zählen, Rechnen oder Schreiben auf die Schule vor. Diese, sicher in guter Absicht erfolgte Vorbereitung kann einem Kind einen deut-

lich erkennbaren Lernvorsprung verschaffen. Ein gravierender Lernvorsprung kann aber ebenso auf eine anregende „natürliche Lernatmosphäre“ im Elternhaus zurückzuführen sein. Wenn z. B. einer der Eltern Mathematiker, Mathematiklehrer, Naturwissenschaftler oder Informatiker ist, dann „schnappt“ ein Kind zwangsläufig Themen aus der Welt der Mathematik auf, wird angeregt, sich mit ihnen auseinanderzusetzen und erfährt eine (in unserer Gesellschaft nicht selbstverständliche) hohe Wertschätzung der Mathematik. Aus solchen förderlichen sozialen Einflüssen darf man andererseits jedoch nicht vorschnell auf eine vorhandene mathematische Begabung schließen. Der Vorhersagezeitraum bis zur Entfaltung des eigenen mathematischen Leistungspotenzials im Jugendalter ist noch sehr groß ...

- Problematisch für das Erkennen einer besonderen Begabung bei einem Erst- oder Zweitklässler kann dessen „Schieflage“ zwischen verschiedenen Entwicklungsprozessen sein. Zum Beispiel haben viele begabte Schulanfänger, die schon mehrere Sachbücher gelesen oder einige Knobelmäße „durchgearbeitet“ haben, in den Fächern Deutsch oder Mathematik das Niveau eines Dritt- oder Viertklässlers. Andererseits sind aufgrund der einseitig bevorzugten intellektuellen Tätigkeiten ihre sozialen Kompetenzen und oder ihre motorischen Fähigkeiten oft unterentwickelt. Vor allem intellektuell extrem hoch begabte Kinder haben häufig Schwierigkeiten, in ihrem sozialen Umfeld einen angemessenen Platz zu finden. Hierbei spielt natürlich eine Rolle, dass

hochbegabte Kinder aufgrund ihrer einseitigen Interessenausprägung selten unter Gleichaltrigen adäquate Spiel- oder Kommunikationspartner finden und sie somit schon frühzeitig mehr auf sich selbst angewiesen sind. Solche hochbegabten Kinder und „normal“ entwickelte Kinder mit einem breiten Spektrum von Spielaktivitäten verstehen sich dann meist wechselseitig nicht und das gegenseitige Unverständnis für das jeweilige „Anderssein“ führt nicht selten zu einer sozialen Isolation der hochbegabten Kinder.

Die Diskrepanz zwischen dem Niveau der intellektuellen und dem der körperlich-motorischen Fähigkeiten kann sich z. B. darin zeigen, dass geistig hochbegabte Kinder zwar wie Viertklässler lesen, schreiben oder rechnen, aber andererseits nicht in der Lage sind, mit einer Schere umzugehen, sich selbstständig die Schuhe zuzubinden oder einfache Teilhandlungen bei sportlichen Aktivitäten zu koordinieren. Da die Körperkraft und die psychomotorische Leistungsfähigkeit im Grundschulalter einen sehr bedeutsamen Zuwachs erfahren, sind jedoch sportliche Leistungen oder manuelle Geschicklichkeit oft ausschlaggebend für das Ansehen eines Kindes in seiner Klasse (vgl. Nickel 1981, S. 85). Bei derartigen Schief lagen bedingen sich also auch wechselseitig körperliche und soziale Probleme, die bei hochbegabten Kindern zu gravierenden Persönlichkeitsstörungen führen können¹.

Im Folgenden skizzieren wir anhand einiger Fallbeispiele aus unseren Förderprojekten exemplarisch frühkindliche Entwicklungsverläufe kleiner Matheasse² und zeigen dabei aus einer ganzheitlichen Sicht Möglichkeiten, Probleme und Grenzen des Erkennens einer frühkindlichen mathematischen Begabung auf.

Ron³

Ron begann bereits im Alter von etwa drei Jahren, sich für Zahlen zu interessieren. Das Vorwärtszählen lernte er schnell. Von dieser Tätigkeit war er offenbar so fasziniert, dass er im Kindergarten oft nicht mit den anderen Kindern im Sandkasten spielte, sondern es vorzog, sich allein auf eine Bank zu setzen und unentwegt zu zählen. Am Ende merkte er sich jeweils die letzte Zählzahl und zählte beim nächsten Mal von dieser Zahl ab weiter vorwärts. Bis zum Ende der Kindergartenzeit kam er auf diese Weise bis zu einer sechsstelligen Zahl. Hinsichtlich seines ausgeprägten Interesses an Zahlen unterschied sich Ron von anderen gleichaltrigen Kindern. Dennoch maßen die Kindergärtnerinnen sowie die anderen Kinder seiner Spielgruppe Rons Zählaktivitäten keine besondere Bedeutung bei, was ihn „auch nicht weiter störte“.

¹ Somit kann eine Schief lage zwischen verschiedenen Entwicklungsprozessen natürlich auch ein Indiz für das Vorhandensein einer intellektuellen Begabung sein.

² Die hier vorgestellten Kinder wiesen während ihrer mehrjährigen Teilnahme an unseren Förderprojekten vielfach eine besondere mathematische Begabung auf.

³ Die Fallstudie stammt aus Untersuchungen von Käpnick im Rahmen seiner Habilitation (vgl. Käpnick 1998, S. 222-236)

Seit etwa dem vierten Lebensjahr forderte Ron von seinen Eltern kleine Rechengeschichten ein. Sie erfüllten ihm diesen Wunsch und stellten beispielsweise beim Sonntagsspaziergang oder während der Autofahrt Aufgaben wie: *„Auf dem Teich schwimmen acht Enten. Am Ufer sind noch drei Enten. Wie viele Enten sind das insgesamt?“* Solche Aufgaben löste er sehr gern und meist richtig. Auf diese Weise lernte er selbstständig, auf elementarer Stufe zu rechnen – ohne Rechenzeichen zu verwenden, und er entwickelte vermutlich ein erstes „Gefühl“ für die Größe und die Ordnung natürlicher Zahlen.

Sein „Lieblingsbuch“ im Vorschulalter war ein Rechenknoelbuch, das ihm seine Großeltern schenkten, als er etwa vier Jahre alt war. Mit fünf Jahren konnte er selbstständig einfache Kryptogramme, Zahlenkreuzworträtsel u. Ä. m. aus dem Knoelbuch lösen. Auch kreative Spiele wie z. B. Tangram sowie das Erfinden und Erzählen von Fantasiegeschichten bereiteten ihm viel Freude.

Aufgrund der Aussagen von Rons Eltern und seiner Klassenlehrerin, die ihn im ersten Schuljahr betreute, lässt sich einschätzen, dass Ron zum Schulbeginn in etwa folgendes Ausgangsniveau besaß:

Er hatte ein Grundverständnis für Zahlen und für die vier Grundrechenarten. So konnte er problemlos bis 100 000 vorwärts- und rückwärtszählen, alle Ziffern und zweistellige Zahlen lesen und schreiben, im Kontext kleiner Rechengeschichten hatte er selbstständig elementare Rechenfähigkeiten erworben. Einige Grundaufgaben des kleinen „Einspluseins“ und des „Einmaleins“ beherrschte er gedächtnismäßig. Weiterhin er-

fasste er intuitiv Analogien im Aufbau der Zahlen und nutzte diese beim Rechnen. So „übertrug“ er die Aufgabe „ $2 + 1 = 3$ “ auf entsprechende Aufgaben mit größeren Zahlen wie z. B. „ $200 + 100$ “ oder „ $32 + 1$ “.

Hinsichtlich seiner sprachlichen Fähigkeiten schätzte seine erste Klassenlehrerin ein, dass Ron zum Schulanfang flüssig und zum Teil in vollständigen Sätzen sprechen konnte. Wenn er erzählte, sprach er i. Allg. grammatikalisch richtig. Er konnte noch nicht lesen, kannte aber schon fast alle Buchstaben.

Seine Feinmotorik war vergleichsweise durchschnittlich entwickelt.

In der Schule war Ron von Anfang an der leistungsstärkste Schüler seiner Klasse. Er erzielte in allen Fächern (mit Ausnahme des Fachs „Sport“) durchgängig sehr gute Leistungen. Seine schulischen Leistungen verbesserte er Jahr für Jahr kontinuierlich. Im Unterricht der Grundschule lernte Ron zielstrebig und selbstständig. Kennzeichnend für sein großes Lernbedürfnis und für seine intellektuelle Neugier war z. B., dass er im Mathematik-, im Deutsch- oder Sachkundeunterricht Regeln oder ihn interessierende Sachverhalte hinterfragte. Den im Unterricht behandelten Lernstoff erfasste er meist schnell und prägte ihn sich problemlos ein. In Übungsphasen langweilte er sich häufig. Die Lehrerinnen boten ihm dann Zusatzaufgaben an, die er dankend annahm. Des Öfteren forderte er auch selbst Zusatzaufgaben ein. Über schulische Erfolge konnte er sich sehr freuen. Wurde er vor der Klasse für seine Leistungen gelobt, war er stolz. So berichtete er uns: *„Einmal hat mich meine Lehrerin ‚Mathe-Genie‘ genannt, da war ich stolz und bin bestimmt rot geworden.“*

Andererseits erweckte er im Unterricht mitunter den Eindruck, als ob er vor sich hin träumen würde. Daraufhin angesprochen, sagte er mir aber, dass er sich in solchen Situationen entweder langweilte oder dass er über ein anderes ihn interessierendes Problem, z. B. über eine mathematische Knobelaufgabe, nachdachte.

Insgesamt gesehen, schätzte seine Klassenlehrerin Ron als ein mathematisch hoch begabtes Kind ein, was er in unseren Förderstunden eindrucksvoll bestätigte. Der Junge zählt zu den aktivsten und leistungsstärksten Kindern, die wir während der mehr als zehn Jahre dauernden Projektarbeit kennenlernten. Im „Indikatoraufgaben-Test“ (vgl. Käpnick 1998) erreichte er eine sehr hohe Gesamtpunktzahl und wies bei allen Aufgaben sein sehr großes mathematisches Begabungspotenzial nach. Seine besondere Neigung zur „Welt der Zahlen“ spiegelt sich schließlich darin wider, dass während der zweijährigen Förderung im Projekt sich sein Berufswunsch verfestigte, Mathematiker zu werden.

Neben der hohen mathematischen Leistungspotenz fielen auch seine beachtlichen Kompetenzen im sprachlichen und im musischen Bereich auf. Demgegenüber blieben seine sportlichen, bastlerischen und feinmotorischen Leistungen stets unterdurchschnittlich entwickelt, sodass auf Ron die oben beschriebene, häufig zu beobachtende Schiefelage zwischen intellektueller und körperlicher Entwicklung zutrifft.

Tim

Tim kam kurz vor seinem dritten Geburtstag in den Kindergarten, in den er ca. ein Jahr

gern ging. Als jedoch seine Schwester in die Schule kam und er allein in den Kindergarten sollte, weigerte er sich. Tim fehlten Kontakte zu anderen Kindern. Da er immer weinte, wenn er in den Kindergarten ging, entschieden seine Eltern schließlich, dass er die letzten zwei Jahre vor Schulbeginn zu Hause verbringen konnte.⁴

Tims sprachliche Entwicklung verlief normal. Auffällig war jedoch, dass er sehr früh lesen konnte. Bereits mit drei Jahren konnte er aus einem langen Text an allen Stellen seinen Namen herausfiltern und mit knapp vier Jahren loggte er sich mühelos mit seinem Namen in den Computer ein, um ein Spiel zu spielen. Die Vorliebe für Computerspiele hat sich gehalten, er spielt mit sehr großer Ausdauer stundenlang Strategiespiele. Seine zweite Lieblingsbeschäftigung ist seit dem Vorschulalter das Lesen. Generell liest er Bücher, die nicht für seine Altersgruppe bestimmt sind, wie z. B. alle Bände von „Der Herr der Ringe“, dicke Fantasieromane oder Sachbücher zu speziellen Themen. Die Szenen aus den Fantasieromanen spielt er häufig allein oder mit seinen Freunden in Rollenspielen nach.

In der Grobmotorik wies Tim lange Zeit Defizite auf. Seit er regelmäßig zum Turnen geht, sind jedoch deutliche Verbesserungen erkennbar. Dennoch ist er beim Fahrradfahren, beim Schwimmen oder beim Inlinerfahren relativ unsicher. Er spielt kein Fußball und zeigt auch

⁴ Eine mögliche Begründung sieht seine Mutter darin, dass er zum einen im Kindergarten keinen adäquaten Spielkameraden fand. Zum anderen brauchte er vormittags offenbar viel Ruhe, da jeden Nachmittag die Freunde der Schwester kamen und alle zusammen spielten.

ansonsten wenig Interesse an sportlichen Aktivitäten. Da er im Kindergarten (und auch später) fast nie malte oder bastelte, ist seine Feinmotorik ebenfalls unzureichend entwickelt.

Als Tim in die Schule kam, fiel vor allem auf, dass er nur sehr schwer mit Fehlern umgehen konnte. Er reagierte wütend, wenn seine Lehrerin ihn auf einen Fehler hinwies und ihn korrigierte. Mit Geduld und vielen Gesprächen gelang es ihr jedoch, dass Tim allmählich gelassener mit seinen Fehlern umgehen konnte. Aufgrund seines großen Ehrgeizes und seines hohen Anspruchs an sich selbst ärgerte er sich freilich weiter über eigene Fehler, fand es zugleich aber selbstverständlich, anspruchsvolle Knobelaufgaben zu lösen. Obwohl er sehr motiviert und konzentriert Problemaufgaben löste, freute er sich nicht so offensichtlich wie andere Kinder über richtig gelöste Aufgaben, sondern fand dies „einfach ganz normal“.

Zur Schule geht Tim immer noch gern und zu seinem Freundeskreis gehören nun überwiegend Kinder aus seiner Klasse. Es gab zwar Phasen, in denen er in der Schule ausgegrenzt war und sich in den Pausen regelmäßig prügelte. Eine mögliche Begründung hierfür könnte darin liegen, dass dem Jungen soziale Erfahrungen im Umgang mit gleichaltrigen Kindern fehlten, da er nur für kurze Zeit im Kindergarten war.

In Mathematik erzielt Tim stets sehr gute Leistungen. Wenn im Unterricht viel geübt wird, langweilt er sich gelegentlich und fühlt sich unterfordert. Deshalb nahm er gern unser Förderangebot an, mit anderen mathematisch begabten Kindern gemeinsam an-

spruchsvolle Problemaufgaben zu bearbeiten.

In unserem Projekt konnte Tim sowohl eine sehr hohe mathematische als auch eine besondere allgemeine Intelligenz nachweisen. So erreichte er z. B. in beiden Teilen des Intelligenztestes CFT-20⁵ jeweils einen IQ-Wert von 145 und in unserem Indikatortest einen absoluten Spitzenwert. Darüber hinaus besitzt Tim gute visuelle Wahrnehmungsfähigkeiten und ein hervorragendes räumliches Orientierungsvermögen. Er ist z. B. problemlos in der Lage, aufgrund seiner Erinnerung einen Weg in einer unbekanntem Gegend wiederzufinden.

Die kleine Fallstudie belegt – noch deutlicher als bei Ron – eine Schiefelage zwischen verschiedenen Entwicklungsprozessen. Zum einen hatte Tim wegen seiner einseitig bevorzugten intellektuellen Tätigkeiten und Interessen anfangs Schwierigkeiten, in seinem sozialen Umfeld einen angemessenen Platz zu finden. Zum anderen besteht bei ihm eine deutliche Diskrepanz zwischen dem einerseits sehr hohem Niveau seiner intellektuellen Fähigkeiten und andererseits den eher geringer entwickelten körperlich motorischen Fähigkeiten.

⁵ Der Intelligenztest CFT 20 (Culture Fair Test), ein Grundintelligenztest der Skala 2, wurde von Cattell auf der Grundlage eines hierarchischen Faktorenmodells der Intelligenz entwickelt. Der Test gilt als relativ anspruchsvoll und wird deshalb oft zur Ermittlung einer allgemeinen Grundintelligenz eingesetzt. Wir nutzen ihn im Rahmen unserer komplexen Diagnostik in der Regel bei unseren Drittklässlern als eine von vielen Analysemethoden.

Martin

Martin ist ein Einzelkind und wurde im Oktober 1993 geboren. Nach Auskunft der Eltern verlief seine Geburt ohne Komplikationen. Bezüglich seiner Körpermaße betonten sie jedoch, dass Martin als Baby sehr klein und schwach gewesen sei. Bis zum Schulanfang blieb Martin sehr zierlich. Erst danach entwickelte er eine altersgemäße Körperstatur. Seine Mutter beschrieb ihn als einen ruhigen Säugling, der viel schlief und als Kind immer schon mit offenen Augen die Welt wahrnahm. Im Alter von 15 Monaten begann Martin zu sprechen. Im Unterschied zu Gleichaltrigen verwendete er jedoch keine „Babysprache“, sondern konnte sich schon wie ein Dreijähriger artikulieren. Aufgrund des ungewöhnlich gut ausgeprägten Sprachvermögens wurden die Eltern oft von Fremden angesprochen, ob der Junge tatsächlich erst anderthalb Jahre alt sei. Die Mutter verwies dann auf die in unserem Beitrag schon mehrfach angesprochene häufige Schiefelage zwischen intellektueller und körperlicher Entwicklung. Hierin sah sie auch den Hauptgrund dafür, dass Martin Bastelarbeiten und sportlichen Tätigkeiten eher ablehnte. Sport wurde von Martin selbst als sehr gefährlich eingeschätzt.

Mit fünf Jahren konnte Martin bereits lesen und schreiben. Diese Fähigkeiten brachte er sich selbst bei. Zu seiner Lektüre gehörten schon früh die „Harry Potter“-Bände, Sachbücher oder Zeitschriften für Erwachsene, wie z. B. „Geo“ oder „Der Spiegel“, die er zu Hause fand. Der Junge brachte sich auch das Rechnen vorzeitig selbst bei, sodass er vor Schulbeginn recht sicher addieren und subtrahieren konnte.

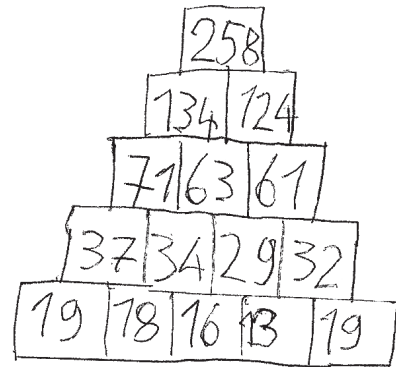


Abb. 3: Beispiel für Martins mathematische Fähigkeiten vor Schulbeginn

Bezüglich seiner kognitiven Fähigkeiten war er mit fünf Jahren frühzeitig „schulreif“. Dennoch wurde den Eltern von einer vorzeitigen Einschulung abgeraten, was diese auch akzeptierten. Hauptgrund hierfür war die vergleichsweise unterentwickelte körperliche Konstitution des Jungen. Infolge dessen spitzte sich aber ein soziales Spannungsfeld zu. Auf Martins Wissensdrang und seinem ausgeprägten Bedürfnis, anderen zeigen zu wollen, was er „alles weiß und kann“, reagierte das Umfeld eher mit Zurückhaltung und Unverständnis. Bereits im Kindergarten und in den ersten zwei Grundschuljahren wurden seine besonderen Leistungspotenziale weder gefördert noch anerkannt, sondern nach Angaben des Vaters sogar unterdrückt: „Er hat von klein auf im Kindergarten bis hin zur Grundschule gehört, er soll sich doch ein bisschen zurücknehmen. ... er sollte doch den anderen auch eine Chance lassen. In den ersten beiden Jahren hat er auch in der Grundschulzeit darunter gelitten.“ Diese aufgezwungene Zurückhaltung, auf die Martin oft resignierend reagierte, kann folgende Episode verdeutlichen:

Als Martin auf einer Zeitschrift einen Koalabären entdeckte, sagte er: „Ja, das ist ein Koa-

labär. Die leben in Australien. Aber ich weiß schon, im Kindergarten darf ich das nicht erzählen, da muss ich sagen, dass sind die Teddybären, die wollen das andere noch nicht hören.“

Obwohl Martin im Klassenverband gut integriert war und in den Pausen Spielkameraden fand, fehlten ihm Anerkennung und Lob von seinen Mitschülern und Lehrern für seine herausragenden intellektuellen Leistungen (was ihm offenbar wichtig war und was er nicht verstehen konnte). Dies führte in den ersten beiden Schuljahren dazu, dass sich der Junge teilweise aus dem Unterrichtsgeschehen zurückzog und versuchte, sich die Aufmerksamkeit auf andere Art und Weise zu „erzwingen“. Die Lehrerin beschrieb dies so: „Er hatte manchmal extreme Ausfälle. Dann fing er an zu schreien, zu weinen und stampfte mit den Füßen auf.“ Auch Martins Mathematiklehrer schilderte aus seinem Unterricht, dass der Junge seine Emotionen nicht unter Kontrolle hätte und sich selbst zu stark unter Leistungsdruck setzen würde. Sich seiner unbefriedigenden Situation bewusst, entwickelte Martin den Ehrgeiz, in den Unterrichtsphasen, in denen er sein Können zeigen durfte, auch nicht zu versagen. Er wollte dann „glänzen“, war aber beim Rechnen oft so aufgeregt, dass er weinte und ihm Fehler unterliefen, die eindeutig unter seinem Leistungsniveau waren. Somit verschlechterten sich seine schulischen Leistungen sogar. Sein Lehrer schätzte ein: „Martin hat eine geringe Frustrationstoleranz, er kann es nicht ertragen, wenn er eine Aufgabe nicht löst. Dann bekam er einen Wutanfall. Es kam auch vor, dass er Sachen durch die Gegend schmiss. Er konnte auch nicht gut mit anderen Kindern zusammensitzen, er hatte einen Platz für sich. Das wollte er auch so.“

Am Braunschweiger Förderprojekt „Mathematische Lernwerkstatt für Kinder“ beteiligte sich Martin erst seit Beginn des vierten Schuljahres regelmäßig, obwohl er schon zu Beginn der dritten Klasse auf Empfehlung seiner Lehrerin am Indikatoraufgaben-Test teilnahm. Bei diesem Test, seiner einzigen Stippvisite im dritten Schuljahr bei uns, gelang es Martin jedoch nicht, alle Aufgaben entsprechend seinem hohen Selbstanspruch zu lösen. Er „verbiss“ sich so sehr in die Aufgaben, dass er resignierte und – wie im Schulunterricht – anfang zu weinen. Deshalb entschloss er sich, nicht weiter am Projekt teilzunehmen. (Aufgrund unserer damaligen Unkenntnis über Martins bisheriger Entwicklung konnten wir seine Entscheidung leider weder bewerten noch beeinflussen.) Zu Beginn des vierten Schuljahres entschied sich Martin aus eigenem Antrieb für eine erneute Teilnahme an unserem Förderprojekt. Die Zusammenarbeit mit ihm gestaltete sich zunächst wiederum als schwierig, da er anfangs ein eher auffälliges Verhalten zeigte (das wir uns zu diesem Zeitpunkt immer noch nicht erklären konnten). Er verhielt sich lautstark und sehr dominant gegenüber den anderen Kindern und störte durch impulsive laute Äußerungen bei Lösungsdiskussionen. Allmählich änderte sich aber sein Verhalten. Während der Förderstunden zeigte sich Martin nunmehr vor allem als ein temperamentvoller und aufgeweckter Junge, der mit hoher intrinsischer Motivation an die gestellten Problemaufgaben heranging und diese eifrig bearbeitete. Er nahm stets sehr aktiv an Vor- und Nachbesprechungen der Aufgaben teil und er präsentierte gern und sprachlich gewandt seine Lösungen. Offenbar bewirkte dies eine Stärkung seines Selbstbewusstseins.

Da Martin immer wieder ein außergewöhnliches Sprachvermögen zeigte, organisierten die Eltern außerdem einen privaten Englischunterricht, in dem ihm der Sprachlehrer ein „großes Sprachtalent“ bescheinigte. In der Schule nahm er daraufhin am Förderunterricht von Sechst- bis Zehntklässlern in Englisch teil, dem er ohne Probleme folgen konnte. Obwohl Martin Sport nicht so gern mag, geht er zweimal in der Woche zum Schwimmen. Des Weiteren nimmt er Flötenunterricht, nutzt seine Zeit für die Gestaltung seiner eigenen Homepage wie auch für Anregungen zu neuen Konstruktionen, die er an „Lego“ einsendet. Sein Berufswunsch ist Meeresbiologe, da seine Lieblingstiere Delfine sind und er schon viele Informationen über diese Lebewesen gesammelt hat.

Zusammenfassend schätzen wir ein, dass Martin ein vielseitig interessierter Junge ist, der vor allem im sprachlichen Bereich begabt, aber auch auf mathematischem Gebiet zu hohen Leistungen fähig ist. Für das Entfalten seiner besonderen Begabungen benötigt der sensible Junge offenbar eine sehr verständnisvolle anregende Lernumgebung.

Jan

Jan wurde im April 1994 geboren. Er lebt gemeinsam mit seinen beiden jüngeren Schwestern (sieben Jahre bzw. ein Monat alt) bei seiner Mutter und seinem Stiefvater. Zu seinem leiblichen Vater hat Jan nur selten Kontakt. Jans Mutter ist z. Z. Hausfrau. Sie hat nach einer Ausbildung als Zahnarzthelferin noch Sozialpädagogik studiert. Sein Vater und sein jetziger Stiefvater sind jeweils Diplom-Elektrotechniker.

Jan besuchte zwei verschiedene Kindergärten, in denen er sich nach Angaben der Mutter nicht sehr wohl fühlte, was ihrer Meinung nach mit den Erzieherinnen und den jeweiligen Einrichtungskonzepten zu tun hatte. Unseres Erachtens könnten die Probleme aber auch im Zusammenhang mit der Trennung der Eltern und dem nachfolgenden Umzug der Familie stehen, denn solche gravierenden familiären Einschnitte sind sicher nicht spurlos an Jan vorbeigegangen.

Eine konkrete Besonderheit in Jans Verhalten resultiert z. B. aus einer bestimmten Erziehungsabsicht der Mutter. Nach ihrer Einschätzung ist Jans leiblicher Vater „hochbegabt“. Er besuchte als Schüler ein Internat, in dem ihrer Meinung nach „bei der Eliteförderung das Sozialverhalten völlig hinten runter fiel“. Da sie auffallende Parallelen zwischen Jans Verhalten und dem seines leiblichen Vaters erkannte, befürchtete sie, dass sich der Junge ähnlich entwickeln könnte. Das bezog sich auf die von ihr positiv gewertete sehr hohe mathematische Leistungspotenz und auf seine ausgeprägte Wissbegier, aber ebenso auf negativ beurteilte Persönlichkeitseigenschaften wie z. B. Egoismus, Perfektionismus und eine geringe Frustrationstoleranz. Letzteres führte dazu, dass die Mutter größten Wert auf Jans Erziehung und hierbei auf seine charakterliche Entwicklung legte. Die Mutter bestätigte dies, indem sie sagte, sie wolle verhindern, dass Jan so „lebensunpraktisch“ wie der leibliche Vater werden würde.

In unseren Förderstunden lernten wir Jan als einen gutmütigen und ruhigen Jungen kennen. Seine Zurückhaltung gab er jedoch so gleich auf, wenn wir eine interessante Problemaufgabe stellten. Dann leuchteten seine

Augen und er erkannte meist blitzschnell mathematische Zusammenhänge, entwickelte spontan, oft intuitiv erfolgversprechende Lösungsideen. Dabei arbeitete er meist allein. Mit dem Erkennen eines Lösungswegs ließ seine Motivation aber ebenso schnell wieder nach. Eher „antrainiert“ bzw. einer Pflicht gehorchend, bemühte er sich um ein übersichtliches Aufschreiben und Kontrollieren seiner Lösungen. Manchmal sagte er in einer solchen Phase unwillig: „Man muss immer genau kontrollieren. Ich weiß, dass mir öfter Fehler passieren.“ Studierende bewerteten dieses Verhalten zunächst so, dass Jans Lernstil durch gründliches und gewissenhaftes Arbeiten gekennzeichnet sei. Transkriptinterpretationen von Videoaufnahmen widerlegten die Einschätzung dann aber. Wir interpretierten Jans Problemlösestil so, dass er oft intuitiv, sprunghaft (scheinbar chaotisch) denkend Lösungsansätze findet⁶ und demgemäß auch seine Aufzeichnungen unvollständig und unsystematisch wirken. Wir nehmen an, dass auch die pädagogisch geschulte Mutter diese Besonderheiten bei Jan beobachtete und konsequent versuchte, den von ihr negativ bewerteten Problemlösestil zu verändern. Natürlich ist es richtig, einer chaotischen Hefortdnung erzieherisch entgegenzuwirken. Problematisch wird m. E. eine solche Einflussnahme aber dann, wenn Jans zweifellos vorhandene besondere mathematische Kreativität unterdrückt und hartnäckig gegen seine vorgeburtlich bestimmte Persönlichkeitsprägung „erzogen“ wird.

Insgesamt gesehen ist Jan ein vielseitig interessiertes und ein sehr wissbegieriges Grundschulkind. Seine Hobbys sind neben der Teilnahme an der Lernwerkstatt Fußball, Computerspiele und naturwissenschaftliche Experimente. Da er Tiere sehr mag, möchte er später Tierzüchter werden. Er interessiert sich vor allem für Reptilien und Wassertiere wie z. B. Fische, Algen, Wale und Haie. In seinem Zimmer hat er ein Aquarium mit Fischen, die er gern beobachtet. Seine mathematische Begabung wies er u. a. in unserem Indikatoraufgaben-Test nach, in dem er eine hohe Gesamtpunktzahl erreichte. Seine besonderen Stärken sind neben der angesprochenen Kreativität und Flexibilität im Denken seine Fähigkeiten im Umgang mit formal-abstrakten Strukturen. Dagegen ist sein räumliches Wahrnehmungs- und Orientierungsvermögen eher unterdurchschnittlich entwickelt⁷.

Unser (bisheriges) Fazit:

Vier Fallstudien erlauben sicher keine Verallgemeinerungen. Wir schätzen aber ein, dass von den mehr als 300 Kindern, die wir inzwischen jeweils mindestens ein Jahr lang in Förderprojekten an verschiedenen Orten betreuten, sehr viele kleine Matheasse ähnliche frühkindliche Entwicklungsprozesse durchlaufen.

Insgesamt bestätigt sich dabei, dass die frühkindliche Entwicklung sehr wichtig für die gesamte Reifung ist und dass sich in dieser

⁶ Jans intuitives, sprunghafter Problemlösestil könnte auch eine Erklärung dafür sein, dass er am liebsten allein knobelte.

⁷ Eventuell ist auch diese Besonderheit eine mögliche Ursache für Jans bevorzugtes intuitives (und mitunter flüchtiges) Denken, denn er wechselt von sich aus beim Problemlösen relativ selten Repräsentationsebenen. Er schafft sich vielmehr schnell abstrakte Strukturen, mit denen er „locker“ jongliert.

Entwicklungsphase besondere mathematische Kompetenzen in sehr enger Wechselwirkung mit der gesamten kindlichen Persönlichkeitsentwicklung herausbilden. Will man also frühkindliche mathematische Leistungspotenziale und deren Ursachen gründlich erfassen, ist eine ganzheitliche Sicht auf die Entwicklung eines Kindes unverzichtbar. Weiterhin zeigt sich, dass – wie eingangs in verschiedenen Theorieansätzen begründet und in den Fallbeispielen exemplarisch erkennbar – offenbar genetisch oder vorgeburtlich bedingte Anlagen eines Kindes ebenso wie sein jeweiliges soziales Umfeld die Entwicklungsprozesse prägen.

Die Fallbeispiele lassen zugleich erkennen, dass (hoch)begabte und hierin eingeschlossen mathematisch begabte Kinder schon im Vorschulalter und im ersten Schuljahr sehr verschiedene Entwicklungs- und Verhaltensbesonderheiten aufweisen. Es gibt nicht selten Disharmonien, viele Entwicklungsprozesse unterliegen Zufälligkeiten, sind wechselhaft. Allein dieser Tatbestand erschwert das Erkennen einer potenziell vorhandenen mathematischen Begabung bei Fünf- bis Achtjährigen enorm. Erschwerend kommt hinzu, dass im Vorschulalter die Entwicklung spezieller mathematischer Fähigkeiten offenbar noch sehr eng bzw. untrennbar (?) mit allgemeiner intellektueller Neugier und Wissbegier verweben ist. Eine spezielle mathematische Ausprägung wie Rons Faszination für Zahlen stellten wir bisher relativ selten fest.

Deshalb erscheint uns eine sichere Diagnostik einer mathematischen Begabung bis etwa zum Schulanfang nicht möglich zu sein. Nur in Ausnahmefällen ist m. E. die Einschätzung „mathematisch potenziell begabt“ für Fünf-

bis Achtjährige angebracht. Solche Ausnahmen sind nach unseren Erfahrungen Kinder, die sich schon mit drei oder vier Jahren auffällig intensiv und beständig mit Zahlen, mit dem Rechnen oder mit geometrischen Figuren und Mustern beschäftigen. Diese Kinder sind früh von der Mathematik fasziniert, erkennen schon grundlegende mathematische Strukturen wie den dezimalen Aufbau unseres Zahlensystems und fordern selbst von ihren Eltern immer wieder mathematische Knobeleyen. Weitere Indizien könnten eine ausgeprägte intellektuelle Neugier oder auch eine Schiefelage zwischen der intellektuellen Entwicklung einerseits und der körperlichen bzw. der sozialen Reifung andererseits sein. Diese Indizien hängen aber von individuellen Ausprägungen ab, sie treffen nicht auf alle potenziell begabten Kinder zu.

Da Begabungsentwicklungen im Vorschulalter bislang kaum erforscht wurden, fehlen schließlich auch wissenschaftlich erprobte Diagnoseinstrumente. Intelligenztests halten wir hierfür aus verschiedenen Gründen (besondere Problematik der Testsituation für jüngere Kinder, Zufallscharakter einer einmaligen Leistungsmessung, fehlende bzw. zweifelhafte inhaltliche Kriterien für besondere mathematische Begabungsentwicklungen im frühen Schulalter, die Position, dass eine allgemeine intellektuelle Begabung nicht notwendigerweise eine spezielle mathematische Begabung einschließt, grundsätzliche Zweifel an der „Messbarkeit“ von mathematischer Fantasie oder Sensibilität) für wenig geeignet. Unser Ansatz besteht vielmehr darin, in Fallstudien zunächst weiter konkrete Entwicklungsprozesse von Kindern aus einer ganzheitlichen Sicht zu erfassen und

später auf der Basis einer größeren Zahl von Fallbeispielen schrittweise theoretische Modelle zu entwickeln.

Literatur

- Caluori, F. (2003): *Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern – Theoretische Modelle und empirische Befunde*, Hamburg: Kovač.
- Dehaene, S. (1999): *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.
- Grassmann, M. u. a. (1995): Arithmetische Kompetenz von Schulanfängern – Schlussfolgerungen für die Gestaltung des Anfangsunterrichts. In: *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, 23, 314-321.
- Hasemann, K. (2003): *Anfangsunterricht Mathematik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Käpnick, F. (1998): *Mathematisch begabte Kinder*. Frankfurt/Main: Lang
- Käpnick, F. (2001): *Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler)*. Berlin: Volk und Wissen.
- Käpnick, F. (2002): “But figures aren’t supposed to have one system only” - About the development of subjective number conceptions of elementary-school children. In E. Cohors-Fresenborg et al (Eds.), *Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1999* (S. 33-43). Hildesheim: Franzbecker.
- Käpnick, F. & Fuchs, M. (2004): *Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Erst- und Zweitklässler)*. Berlin: Volk und Wissen & Cornelsen.
- Nickel, H. (1981³): *Entwicklungspsychologie des Kindes- und Jugendalters*. Bern: Huber.
- Roth, G. (2001): *Fühlen, Denken, Handeln – Wie das Gehirn unser Verhalten steuert*. Frankfurt/Main: Suhrkamp.
- Roedell, W. C., Jackson, N. E. & Robinson, H. B. (1989): *Hochbegabung in der Kindheit. Besonders begabte Kinder im Vorschul- und Grundschulalter*. Heidelberg: Asanger.