

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertationsschrift unter dem Titel

**„Erfassung und Entwicklung mathematischer (Vor)Kenntnisse  
und Kompetenzen im Bereich Größen bei Vor- und  
Grundschulkindern:  
Erhebung von Ausprägungsgraden mathematischen  
(Vor)Wissens anhand eines diagnostischen Interviews“**

in der Fakultät I – Erziehungs- und Bildungswissenschaften – der  
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg  
im Februar 2009 angenommen.

<b>1</b>	<b>EINLEITUNG .....</b>	<b>5</b>
1.1	Darstellung des Themas und Forschungsinteresse .....	5
1.2	Problemaufriss.....	7
1.3	Überblick über den Inhalt der Arbeit .....	8
<b>2</b>	<b>DIE KOGNITIVE ENTWICKLUNG DES GRÖßENVERSTÄNDNISSES VON KINDERN .....</b>	<b>10</b>
2.1	PIAGETS Stufentheorie .....	10
2.2	Entwicklungsstufen zur Ausbildung der Messfähigkeit auf der Grundlage PIAGETS	13
2.3	Entwicklung des Größenverständnisses bei Kindern .....	17
2.3.1	Kognitive Entwicklung und Größen .....	18
2.3.2	Grundlagen zur Ausbildung eines Messsinns .....	20
2.3.3	Ausbildung von Längenkzepten .....	26
2.3.4	Ausbildung des Zeitwissens .....	31
2.4	Zusammenfassung .....	34
<b>3</b>	<b>BEDEUTUNG DER KOGNITIVEN ENTWICKLUNG IN DEN BEREICHEN „LÄNGE“ UND „ZEIT“ FÜR DEN MATHEMATIKUNTERRICHT DER GRUNDSCHULE .....</b>	<b>36</b>
3.1	EXKURS: Vom Körpermaß zum metrischen System .....	37
3.2	Faktoren für erfolgreichen Unterricht in Bezug auf „Länge“ und „Zeit“– Befunde internationaler Unterrichts- und Forschungsprojekte.....	39
3.2.1	Aktueller Forschungsstand zum Thema Längenmessung im Unterricht .....	44
3.2.2	Aktueller Forschungsstand zum Thema Zeitmessung im Unterricht .....	49
3.3	Konsequenzen aus den Studien – ein didaktischer Neu-Zugang .....	51
3.4	Unterrichtserfahrungen und Praxisbeispiele im Vergleich zu Curriculum und wissenschaftlichen Befunden.....	55
3.5	Zusammenfassung .....	64
<b>4</b>	<b>MÖGLICHKEITEN ZUR ERFASSUNG KINDLICHEN WISSENS IM BEREICH „LÄNGE“ UND „ZEIT“ ANHAND DIAGNOSTISCHER VERFAHREN .....</b>	<b>66</b>
4.1	Grundlagen und Methoden diagnostischer Leistungsfeststellung.....	68
4.1.1	Methoden der Beobachtung von Handlungsweisen und kindlichen Reaktionen .....	69
4.1.2	Befragungsmethoden in der Kindheitsforschung .....	71
4.1.3	Qualitative Interviews .....	73
4.2	Kinderbilder im Unterricht der Grundschule .....	76

4.2.1	Umgang mit und Interpretation von Kinderbildern.....	76
4.2.2	Kinderzeichnungen in diagnostischen Interviews .....	78
<b>4.3</b>	<b>Zusammenfassung .....</b>	<b>80</b>
<b>5</b>	<b>KONTEXT DER STUDIE: DAS <i>EARLY NUMERACY RESEARCH PROJECT</i> – ENRP .....</b>	<b>82</b>
<b>5.1</b>	<b>Vorstellung des Gesamtkonzeptes und Ziele des ENRP.....</b>	<b>83</b>
<b>5.2</b>	<b>Beschreibung des ENRP-Interviewverfahrens .....</b>	<b>86</b>
<b>5.3</b>	<b>Kernelemente des Projektes .....</b>	<b>88</b>
5.3.1	Ausprägungsgrade („ <i>Growth-Points</i> “) .....	89
5.3.2	Interviewleitfaden, Interviewprotokoll .....	91
5.3.3	Materialien .....	92
5.3.4	Die Rolle der Sprache im ENRP-Interview.....	93
5.3.5	Abbruchkriterien .....	94
<b>5.4</b>	<b>Zusammenfassung und Konsequenz: Notwendigkeit der Überarbeitung .....</b>	<b>95</b>
<b>6</b>	<b>VORLÄUFIGE NEUKONZEPTION DES INTERVIEWS UND SEINE BEGRÜNDUNG: DAS <i>ELEMENTARMATHEMATISCHE BASISINTERVIEW – EMBI</i> .....</b>	<b>97</b>
<b>6.1</b>	<b>Zeit.....</b>	<b>99</b>
6.1.1	Aufgabe E 1.....	99
6.1.2	Aufgabe E 2.....	100
6.1.3	Aufgabe E 3.....	101
6.1.4	Aufgabe E 4.....	102
6.1.5	Aufgabe E 5.....	105
6.1.6	Aufgabe E 6.....	106
6.1.7	Aufgabe E 7.....	108
<b>6.2</b>	<b>Länge .....</b>	<b>109</b>
6.2.1	Aufgabe F 1.....	109
6.2.2	Aufgabe F 2.....	110
6.2.3	Aufgabe F 3.....	111
6.2.4	Aufgabe F 4.....	112
6.2.5	Aufgabe F 5.....	115
6.2.6	Aufgabe F 6.....	116
6.2.7	Aufgabe F 7.....	117
6.2.8	Aufgabe F 8.....	118
6.2.9	Aufgabe F 9.....	119
6.2.10	Aufgabe F 10.....	120
<b>6.3</b>	<b>Zusammenfassung .....</b>	<b>122</b>
<b>7</b>	<b>DESIGN UND AUSWERTUNG DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG ... .....</b>	<b>123</b>
<b>7.1</b>	<b>Methodisches Vorgehen und Rahmenbedingungen .....</b>	<b>123</b>
<b>7.2</b>	<b>Teilnehmende Einrichtungen und Probanden.....</b>	<b>126</b>

<b>7.3</b>	<b>Darstellung und Diskussion der Untersuchungsergebnisse.....</b>	<b>127</b>
7.3.1	Untersuchungsergebnisse für den Zeitteil des Interviews .....	128
7.3.2	Untersuchungsergebnisse für den Längenteil des Interviews .....	147
<b>7.4</b>	<b>Zusammenfassung .....</b>	<b>171</b>
<b>8</b>	<b>KONSEQUENZEN AUS DER STUDIE UND NEUKONZEPTION DES INTERVIEWS.....</b>	<b>173</b>
<b>8.1</b>	<b>Neukonzeption der Ausprägungsgrade für die Teile E und F.....</b>	<b>173</b>
<b>8.2</b>	<b>Neukonzeption Bereich „Zeit“ .....</b>	<b>177</b>
8.2.1	Aufgabe E 1 N .....	178
8.2.2	Aufgabe E 2 N .....	178
8.2.3	Aufgabe E 3 N .....	179
8.2.4	Aufgabe E 4 N .....	180
8.2.5	Aufgabe E 5 N .....	180
8.2.6	Aufgabe E 6 N .....	181
8.2.7	Aufgabe E 7 N .....	182
<b>8.3</b>	<b>Neukonzeption Bereich „Länge“ .....</b>	<b>184</b>
8.3.1	Aufgabe F 1 N .....	184
8.3.2	Aufgabe F 2 N .....	185
8.3.3	Aufgabe F 3 N .....	186
8.3.4	Aufgabe F 4 N .....	187
8.3.5	Aufgabe F 5 N .....	188
8.3.6	Aufgabe F 6 N .....	189
8.3.7	Aufgabe F 7 N .....	190
<b>8.4</b>	<b>Zusammenfassung .....</b>	<b>191</b>
<b>9</b>	<b>IMPLIKATIONEN UND AUSBLICK.....</b>	<b>192</b>
<b>10</b>	<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>197</b>
<b>11</b>	<b>VERZEICHNIS ABBILDUNGEN UND TABELLEN.....</b>	<b>206</b>

# 1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist im Rahmen eines kooperativen internationalen Entwicklungsforschungsprojektes dreier Arbeitsgruppen an den Universitäten Kassel, Melbourne und Oldenburg zur Erfassung und Förderung mathematischer Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich angesiedelt.

Sie befasst sich mit der Diagnostik mathematischer Kompetenzen von Kindern im Kindergartenalter bis zur Klassenstufe 2 im Bereich „Größen und Messen“. Kontext ist die deutsche Fassung eines ursprünglich in Australien entwickelten handlungsleitenden Interviewverfahrens für den Einsatz in Kindergarten und Grundschule – das Elementarmathematische Basisinterview (PETER-KOOP, WOLLRING, SPINDELER & GRÜßING 2007).

## 1.1 Darstellung des Themas und Forschungsinteresse

Internationale Vergleichsstudien wie TIMSS, PISA und IGLU dienen in erster Linie dazu, außerschulischen Entscheidungsträgern sinnvolle bildungspolitische Entscheidungen zu ermöglichen. Aus diesem Grunde sind solche Untersuchungen auf Evaluation großer Schülergruppen und verschiedener Schulsysteme angelegt. Den Lehrkräften liefern diese Studien jedoch nur geringe oder keine Informationen über die individuelle Lernentwicklung einzelner Schüler oder Lerngruppen. Die in den Rahmenrichtlinien verankerte Förderung aller Schülerinnen und Schüler, unabhängig von ihren individuellen Begabungen und Fähigkeiten, gehört hingegen zum Bildungsauftrag der Grundschule (KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND 2004, 7). Grundlage für diese individuelle Förderung ist eine handlungsleitende Diagnostik vonseiten des Lehrers, um Vorkenntnisse und Lernfortschritt differenziert erfassen und bestimmen zu können.

Bislang liegen für den Mathematikunterricht in der Grundschule sowie für die Entwicklung mathematischer Vorläuferkenntnisse im Kindergarten kaum geeignete und inhaltlich differenzierte Diagnoseverfahren für die Hand der Lehrkraft beziehungsweise der Erzieherin vor. Bestehendes Testmaterial bezieht sich im Wesentlichen auf die Entwicklung von Zahlbegriff und Operationsverständnis, während geometrisches (Vor-)Wissen und Fähigkeiten sowie (Vor-)Kenntnisse zu Größen unberücksichtigt bleiben.

Grundlage der vorliegenden Arbeit ist ein halbstandardisiertes Interview zur Erfassung und Dokumentation mathematischer Kompetenzen von fünf- bis siebenjährigen Kindern in den Klassen 0 bis 2 zu den Bereichen Arithmetik, Größen und Geometrie, das zwischen 1999 und 2001 in Australien entwickelt wurde. Dieser Interviewleitfaden entstand im Kontext des *Early Research Numeracy Project* (im Folgenden ENRP genannt) mit dem Ziel, durch kompetenzorientierte und materialgestützte halbstandardisierte Einzelinterviews mathematische Performanzen von Schülerinnen und Schülern der Klassen 0 bis 2 differenziert und über einen längeren Zeitraum zu erheben und anhand von Ausprägungsgraden systematisch auszuwerten und zu beschreiben (vgl. CLARKE U. A. 2000).

Eine deutsche Übersetzung des Interviewleitfadens wurde vom Wintersemester 2003/2004 bis zum Wintersemester 2005/2005 an zwei ausgewählten Oldenburger Grundschulen in Zusammenarbeit mit Studierenden erprobt. Hierbei wurden insbesondere Schwächen in dem Interviewteil festgestellt, der sich auf den Bereich „Größen“ bezieht. Diese Schwächen betreffen im Wesentlichen zum einen widersprechende aktuelle empirische Befunde zum Umgang mit nicht-standardisierten Einheiten und zum anderen die Festlegung der Abbruchkriterien bei falschen beziehungsweise fehlenden Schülerantworten.

Im Zentrum dieser Arbeit steht daher die forschungsgeleitete Überarbeitung und empirische Erprobung des Interviewteils zu Größen in Bezug auf die Bereiche „Länge“ und „Zeit“.

Die Erarbeitung und Neukonzeption eines geeigneten diagnostischen Instrumentes basiert schwerpunktmäßig auf zwei Forschungsfragen:

Der erste Schwerpunkt der Arbeit liegt auf der wissenschaftlichen Untersuchung und Optimierung des Interviewverfahrens hinsichtlich folgender Aspekte:

1. Überprüfung und Präzisierung des in Australien entwickelten Theorierahmens zu Ausprägungsgraden des Größenverständnisses von Fünf- bis Siebenjährigen auf der Basis aktueller internationaler Literatur.
2. Adaption beziehungsweise Neuentwicklung der entsprechenden Interview-Items einschließlich unterstützender Materialien und Evaluation der im australischen Original vorgesehenen Abbruchkriterien.
3. Überarbeitung und Weiterentwicklung des Interviewprotokolls zur Erfassung der individuellen Fähigkeiten und des (Vor-)Wissens der Kinder als Grundlage für die Zuordnung von Ausprägungsgraden.

Der zweite Schwerpunkt der Arbeit liegt auf der empirischen Erprobung des weiterentwickelten Interviewleitfadens einschließlich seiner Begleitinstrumente mit dem Ziel der Entwicklung eines validen diagnostischen Instruments zur

Erhebung des Größenverständnisses von Fünf- bis Siebenjährigen für den Einsatz im Kindergarten und im mathematischen Anfangsunterricht der Grundschule.

## 1.2 Problemaufriss

Die Förderung einer fachbezogenen Lernentwicklung durch Unterricht steht seit den internationalen Leistungsvergleichsstudien TIMSS, PISA und IGLU wieder stärker im Fokus der Unterrichts- und Lehr-/Lernforschung. Mehr und mehr tritt die Frage in den Vordergrund, welche Bedingungen möglichst optimale Lernergebnisse für möglichst alle Schüler einer Klasse erbringen (vgl. GÖTZ U. A. 2008, 9).

In der Literatur unbestritten ist, dass sich mathematisches Wissen und mathematische Kompetenzen von Kindern bereits weit vor Eintritt in die Schule entwickeln.

„Wenn diese Vorläuferfähigkeiten bei Kindern im Regelfall schon früh entwickelt sind, dann ist es auch möglich, das Fehlen dieser frühen Fähigkeiten [...] bereits vor Schuleintritt zu diagnostizieren“ (ASTER/ LORENZ 2005, 9).

Für den Bereich Arithmetik wurde an der Universität Oldenburg bereits eine Neukonzeption des ENRP-Interviews erarbeitet – das so genannte EMBI-Interview (vgl. PETER-KOOP U. A. 2007).

Das EMBI setzt genau an diesem Punkt an. Mit Hilfe des EMBI-Interviews können mathematische Fähigkeiten von Kindern diagnostiziert werden. Der in Deutschland bereits publizierte Teil des EMBI-Interviews befasst sich mit arithmetischem Wissen von Kindern bereits vor Schuleintritt (Kindergarten) bis zur Klassenstufe 2.

„Damit verfolgt das EMBI u. a. auch das Ziel, der Entstehung von Rechenschwierigkeiten durch möglichst frühzeitiges Aufdecken von Förderbedürftigkeiten entgegenzuwirken. Das Testverfahren ist darauf ausgerichtet, Diagnose und Förderung eng aufeinander abzustimmen, so dass Kinder mit besonderen individuellen Schwierigkeiten identifiziert und entsprechend gefördert werden können“ (GÖTZ U. A. 2008, 140).

Während für den arithmetischen Bereich das EMBI-Interview bereits fertig gestellt wurde, ergaben die ersten Erprobungen mit einer Übersetzung des australischen ENRP-Teils zum Bereich „Rechnen mit Größen“ folgende Schwierigkeiten beziehungsweise weiteren Handlungsbedarf:

- Verständnisschwierigkeiten der Kinder bei einzelnen Items, die nicht der deutschen Übersetzung geschuldet sind;

- Unstimmigkeiten in Bezug auf die Reihenfolge und Hierarchisierung der Frage-Items;
- widersprüchliche Befunde zu den Abbruchkriterien, wenn die Reihenfolge der Items variiert wurde.

Das Erkenntnisinteresse der vorliegenden Arbeit bezieht sich auf eine forschungsgeleitete Erkundung, Dokumentation und Analyse des Größenverständnisses von fünf- bis siebenjährigen Kindern und ist an folgenden Forschungsfragen orientiert:

- Wie entwickelt sich das mathematische Verständnis von Größen bei Kindern im Alter von fünf bis sieben Jahren?
- Welche Stufen lassen sich diesbezüglich in Form von Ausprägungsgraden theoretisch erfassen?
- Anhand welcher Interview-Items einschließlich begleitenden Materials können individuelles (Vor-)Wissen und Fortschritt möglichst differenziert und präzise erhoben werden?
- Welche Abbruchkriterien lassen sich diesbezüglich empirisch begründen?

### 1.3 Überblick über den Inhalt der Arbeit

Im theoretischen Teil wird auf der Basis einer umfassenden Analyse der nationalen und internationalen Literatur zum konzeptionellen Verständnis und (Vor-)Wissen von jüngeren Kindern im Bereich Größen eine Rahmentheorie zur (Neu-)Strukturierung der Ausprägungsgrade entwickelt.

Zunächst wird in Kapitel 2 die *Kognitive Entwicklung des Größenverständnisses von Kindern* beleuchtet. Dazu werden PIAGETS Erkenntnisse bezüglich der mathematischen Ausbildung der Messfähigkeit dargelegt (Kapitel 2.1 und 2.2), um anschließend neuere mathematikdidaktische Befunde zur Ausbildung eines Längenkonzeptes und des Zeitwissens von Kindern diskutieren zu können (Kapitel 2.3).

Kapitel 3 umfasst die *Bedeutung der kognitiven Entwicklung für den Mathematikunterricht der Grundschule*. Hier werden die Konsequenzen aus aktuellen Studien zu den für diese Arbeit bedeutsamen Größenbereichen „Länge“ und „Zeit“ in einem didaktischen Neu-Zugang für Unterrichtsarbeit zusammengefasst.

Das vierte Kapitel bezieht sich auf grundlegende Kriterien diagnostischer Instrumente. Um Einsichten in Denkweisen und Handlungsstrukturen zu erlangen, ist die Diagnose kindlichen Lernverhaltens unabdingbar (vgl. GÖTZ



U. A. 2008, 140). Aus diesem Grunde werden hier verschiedene *Möglichkeiten zur Erfassung kindlichen Wissens* vorgestellt und beschrieben.

Um aussagekräftige Informationen über kindliche Lernstrategien und ihr Wissen in Bezug auf das Rechnen mit Größen zu erhalten, werden Ausprägungsgrade formuliert, mit denen Wissensstände von Kindern beschrieben werden können. Die in der vorliegenden Arbeit zu entwickelnden Ausprägungsgrade basieren auf den Erkenntnissen des australischen ENRP-Projektes (vgl. CLARKE U. A. 2000) – dort werden sie „*Growth-Points*“ genannt. Anhand dieser „*Growth-Points*“ soll der Lernzuwachs und auch der aktuelle Lernstand der Kinder erläutert und dargestellt werden. Da die Ausprägungsgrade auch an neuere mathematikdidaktische Befunde angepasst werden müssen, bringt eine Neustrukturierung und Formulierung der Ausprägungsgrade ebenfalls eine Neuformulierung und Restrukturierung der Interview-Items sowie der Auswertungsinstrumente und -verfahren mit sich. Diese sollen im zweiten Teil der Arbeit qualitativ wie quantitativ erprobt und empirisch abgesichert werden.

Dazu wird zunächst in Kapitel 5 der Kontext der Studie, das *Early Numeracy Research Project*, beschrieben, wobei folgende Kernelemente dieses Projektes Berücksichtigung finden: die *Ausprägungsgrade* (Kapitel 5.3.1), der *Interviewleitfaden* mit *Protokollbogen* (Kapitel 5.3.2), die *Materialien*, welche bei der Durchführung des Interviews eingesetzt werden (Kapitel 5.3.3), die *Rolle der Sprache* beim ENRP (Kapitel 5.3.4) und die *Abbruchkriterien*, durch die eine gezielte Unterbrechung des Interviews erreicht werden soll, um Kinder nicht zu überfordern (Kapitel 5.3.5).

Daran schließt sich die Beschreibung der empirischen Untersuchung an. Dazu wird zunächst eine für die Erprobungsphase konzipierte *Erprobungsfassung des Interviewleitfadens* vorgestellt (Kapitel 6). Im Anschluss daran werden Design und Auswertung der empirischen Untersuchung dargelegt (Kapitel 7). Aus den Untersuchungsergebnissen und Auswertungen ergeben sich die Neuformulierung und Neustrukturierung der Ausprägungsgrade, die in Kapitel 8 dargestellt und begründet werden (Kapitel 8.1). Der auf der Grundlage der neu abgefassten Ausprägungsgrade und der Untersuchungsergebnisse überarbeitete Interviewleitfaden samt dazugehörigem Interviewprotokollbogen wird anschließend vorgestellt, und zwar für den Bereich „Zeit“ in Kapitel 8.2 und für den Bereich „Länge“ in Kapitel 8.3.

Abschließend werden *Ausblicke und Konsequenzen für weitere Forschungsaufgaben* aufgezeigt.